Exercice 1

énoncé :

1. Montrer que
$$]0,1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[.$$
2. Montrer que la réunion précédente est une réunion d'ensembles disjoints.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

correction :

1. Il suffit de montrer l'inclusion dans les deux sens :
   - Soit $x \in]0,1[$, alors $\frac{1}{x} \in]1,+\infty[$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 < \frac{1}{x} \leq n+2$. Il suffit que $n+2$ soit la partie entière superieure de $\frac{1}{x}$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n+2} \leq x < \frac{1}{n+1}$, ce qui signifie que
   $$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$$
   - Soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n+2} \leq x < \frac{1}{n+1}$, ce qui signifie que $x \in]0,1[$ car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n+2}$ et $\frac{1}{n+1} \leq 1$.
2. Si il existait $x \in]0,1[$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ tel que $x \in [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ et $x \in [\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}[$, alors on aurait $n+1 < \frac{1}{x} \leq n+2$ et $m+1 < \frac{1}{x} \leq m+2$. Donc la partie entière superieure de $\frac{1}{x}$ serait à la fois égale à $n+2$ et à $m+2$. Donc on aurait $n = m$, ce qui est absurde.
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ est donc une réunion d'intervalles deux à deux disjoints, donc en notant λ la mesure de Lebesgue, on a, par σ-additivité de la mesure :
   $$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda([\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
   Or,
   $$1 = \lambda(]0,1[) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[)$$
   Donc finalement,
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$$

Exercice 2

énoncé :
Soit E un ensemble. On définit $\mu : 2^E \to [0, \infty]$ par :

$$\forall A \in 2^E, \mu(A) = sup\{card(B), B \subseteq A, B \text{ fini. }\}$$

1. Montrer que μ est une mesure positive.
2. Montrer que μ est fini si et seulement si E est fini.

corrigé :

1. Montrons que μ est une mesure positive.
   - 2^E est une tribu
   - $\forall B \subseteq E$, tel que B est fini, $card(B) \in \mathbb{N}$, donc $\forall A \in 2^E$, $\mu(A)$ est la borne supérieure d'un ensemble d'entier, donc $\mu(A) \in [0, \infty]$.
   - $\mu(\emptyset) = 0$ car $card(\emptyset) = 0$.
   - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (2^E)^{\mathbb{N}}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ quand $n \neq m$.
     - 1er cas : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < \infty$, et alors

       $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} card(A_n) < +\infty.$$

       Donc $(card(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini (car la série correspondante converge), ce qui signifie qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > K$, $A_n = \emptyset$. Donc finalement, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un ensemble fini comme union fini d'ensembles finis et on peut donc écrire

       $$\sum_{n\in\mathbb{N}} card(A_n) = \sum_{n=0}^{K} card(A_n) = card(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

     - 2ème cas : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = +\infty$. Et alors
       - Ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_n) = +\infty$, et, comme $A_n \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a bien

         $$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

       - Ou bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = card(A_n) < +\infty$, et alors comme la série est à termes positifs et diverge, $\forall K > 0$ il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que

         $$\mu(\cup_{n\in\{0,\ldots,N_K\}} A_n) = card(\cup_{n\in\{1,\ldots,N_K\}} A_n) = \sum_{n=0}^{N_K} card(A_n) > K.$$

         Ainsi, $\cup_{n\in\{1,\ldots,N_K\}} A_n$ est un ensemble fini dont le cardinal est plus grand que n'importe quel $K > 0$.
         Comme, $\forall N_K \in \mathbb{N}$, $\cup_{n\in\{1,\ldots,N_K\}} A_n \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on en déduit que : $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq \sup\{card(\cup_{n\in\{1,\ldots,N_K\}} A_n),\ K \in [0, \infty[\}$.C'est à dire $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \infty$.
2. trivial.