Théorie de la Mesure et Intégration
Licence 3 MASS

Exercices supplémentaires

5 novembre 2013

Question 1

Soit Ω un ensemble fini non vide, et $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Pour un sous ensemble A de Ω, on note $Card(A)$ le cardinal de A. On rappelle que $Card(\emptyset) = 0$. On rappelle également que si μ est une mesure positive, alors **un ensemble** $N \in \mathcal{P}(\Omega)$ **est dit** μ**-négligeable si** $\exists A \in \mathcal{A}$**, tel que** $N \subseteq A$ **et** $\mu(A) = 0$. On rappelle qu'une mesure positive μ sur $\mathcal{A}$ telle que $\mu(\Omega) = 1$ est appelée mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. Montrer que la fonction $\mathcal{U} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ définie par : $\forall A \in \mathcal{A}, \mathcal{U}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. Soit P_1 et P_2 deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On note $\mathcal{N}_1$ l'ensemble des ensembles P_1-négligeable et $\mathcal{N}_2$ l'ensemble des ensembles P_2-négligeables.
   (a) Montrer que $\frac{P_1+P_2}{2}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ est l'ensemble des ensembles $\frac{P_1+P_2}{2}$-négligeables.

Question 2

Soit un entier $n > 1$. Soit μ la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $\mu(\{x\}) = 0$.
2. Démontrer que $\mu(\mathbb{N}^n) = 0$.

Question 3

On note μ la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer
$$\inf\{\mu(U), U \text{ ouvert dense dans } \mathbb{R}\}.$$
   indication : on pourra montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$, et dont la mesure de Borel est plus petite que ϵ.