Exercice 1

énoncé : Soit X, Y et I trois ensembles. Soit $(M_i)_{i\in I} \in (2^X)^I$ Soit $f : X \to Y$ Comparez $f(\cap_{i\in I} M_i)$ et $\cap_{i\in I} f(M_i)$

Exercice 2

énoncé : Donnez la tribu de parties de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ engendrée par $\{1\}$.

Correction : Notons $\mathcal{A}$ la tribu de parties de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ engendrée par $\{1\}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, elle contient $\emptyset$ et $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. De plus par définition, $\{1\} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par complémentaire donc $\{1, 2, 3, 4, 5\}\backslash\{1\} = \{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$. Donc obligatoirement, $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \subseteq \mathcal{A}$. Mais on peut vérifier facilement (on passe ici la démonstration) que $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ est une tribu. Donc $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

Exercice 3

énoncé : Soit I et J deux ensembles non vides, et soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille à valeurs dans $[0, \infty]$. Démontrer que $\sup_{i\in I}(\sup_{j\in J} x_{i,j}) = \sup_{j\in J}(\sup_{i\in I} x_{i,j})$.

Correction : $\forall i \in I$, $\forall j \in J$, on a :

$$x_{i,j} \leq \sup_{i\in I} x_{i,j},$$

donc $\forall i \in I$, on a :

$$\sup_{j\in J} x_{i,j} \leq \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} x_{i,j}.$$

Ce qui signifie que $\sup_{j\in J} x_{i,j}$ (qui ne dépend que de i) est majoré, quelque soit i, par $\sup_{j\in J} \sup_{i\in I} x_{i,j}$.

Donc $\sup_{i\in I}(\sup_{j\in J} x_{i,j})$, qui par définition est le plus petit des majorants de $\{\sup_{j\in J} x_{i,j}, i \in I\}$ est plus petit que $\sup_{j\in J} \sup_{i\in I} x_{i,j}$.

Ainsi,

$$\sup_{i\in I}(\sup_{j\in J} x_{i,j}) \leq \sup_{j\in J}(\sup_{i\in I} x_{i,j}).$$

On fait de même pour montrer l'inégalité inverse.