Théorie de la Mesure et Intégration
Licence 3 MASS
Interrogation 3

Salle C1309

Jeudi 7 Novembre

Questions de cours

1. Donnez une définition de la tribu Borelienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et une définition de la mesure Borelienne définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mu : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ une mesure positive. Soit $K \subseteq X$ une partie de X. Que signifie la phrase : "K est μ-négligeable" ?
3. Donnez une définition de la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et de la mesure de Lebesgue associée à cette tribu.

Question 1

Soit Ω un ensemble fini non vide, et $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Pour un sous ensemble A de Ω, on note $Card(A)$ le cardinal de A. On rappelle que $Card(\emptyset) = 0$. On rappelle qu'une mesure positive μ sur $\mathcal{A}$ telle que $\mu(\Omega) = 1$ est appelée mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. Montrer que la fonction $\mathcal{U} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ définie par : $\forall A \in \mathcal{A}, \mathcal{U}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. Soit P_1 et P_2 deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On note $\mathcal{N}_1$ l'ensemble des ensembles P_1-négligeable et $\mathcal{N}_2$ l'ensemble des ensembles P_2-négligeables.
   (a) Montrer que $\frac{P_1+P_2}{2}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ est l'ensemble des ensembles $\frac{P_1+P_2}{2}$-négligeables.