

Théorie de la Mesure et Intégration  
Licence 3 MASS  
Interrogation 5

Salle C1309

Jeudi 28 Novembre

**Question [5 pt]**

Soit  $X$  un ensemble non vide muni de sa tribu de parties  $\mathcal{T} = 2^X$ . Soit  $a \in X$ . On note  $\delta_a$  la mesure de dirac en  $a$ . Soit  $f$  une fonction de  $X$  vers  $[0, +\infty]$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}_+^0((X, 2^X), ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, \infty])))$ . [1pt].
2. Soit  $T \in 2^X$ . Calculer

$$\int_T^* f d\delta_a$$

On pourra distinguer les cas  $a \in T$  et  $a \notin T$ . [1,5pt].

3. Montrer que l'application  $\nu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  définie par :

$$\forall T \in 2^X, \quad \nu(T) = \int_T^* f d\delta_a$$

est une mesure positive. [1,5pt]

4. Montrer que cette mesure est complète et identifier les ensembles  $\nu$ -négligeables. [1pt]